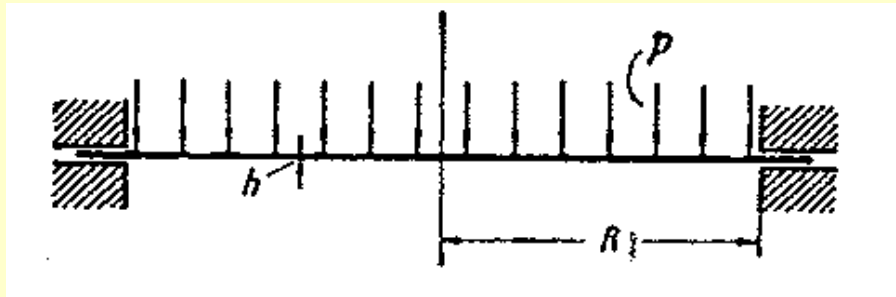




НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ОРТОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Бауэр С.М., Воронкова Е.Б.

1948 Панов Д.Ю., Феодосьев Д.И. - решение, соответствующее несимметричным формам равновесия



$$w = -(R^2 - r^2)^2 (A + Br^4 \cos n\varphi)$$



Панов Д.Ю., Феодосьев В.И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах. ПММ, т.ХII, 1948 с. 389-406.

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

$$\begin{aligned} \vartheta &= A (-4R^2r + 4r^3) + B (4R^4r^3 - 12R^2r^5 + 8r^7) \cos n\varphi \\ \chi &= -Bn (R^4r^3 - 2R^2r^5 + r^7) \sin n\varphi \end{aligned} \quad (7.2)$$

Из (7.3) получим

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 T = R_0 + R_n \cos n\varphi + R_{2n} \cos 2n\varphi \quad (7.3)$$

где R_0 , R_n , R_{2n} — функции r , имеющие вид

$$\begin{aligned} R_0 &= -A^2 (48R^4 - 320R^2r^2 + 336r^4) - \\ &\quad - B^2 (168R^3r^4 - 1728R^2r^6 + 5720R^4r^8 - 7488R^2r^{10} + 3360r^{12}) + \\ &\quad + B^2n^2 \left(\frac{1}{2} 24R^3r^4 - 72R^4r^6 + 165R^4r^8 - 156R^2r^{10} + \frac{1}{2} 405r^{12} \right) \end{aligned}$$

$$R_n = -AB (-320R^2r^2 + 2688R^4r^4 - 5760R^2r^6 + 3520r^8)$$

$$R_{2n} = -B^2 (168R^3r^4 - 1728R^2r^6 + 5720R^4r^8 - 7488R^2r^{10} + 3360r^{12}) -$$

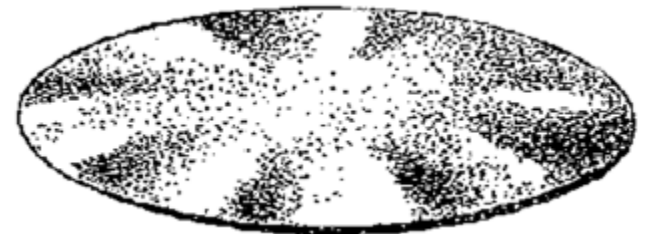
О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

$$\frac{T_{1(k)}}{Eh} = a_k \frac{2-k}{4} r^k + b_k \frac{2+k}{4} r^{-k} - c_k r^{k-2} - d_k r^{-k-2}$$

при $k=0, k=n, k=2n$

$$\begin{aligned} \frac{T_{1(0)}}{Eh} = & a_0 \left(\frac{\log r}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{b_0}{2} - c_0 \frac{\log r}{r^2} - \frac{d_0}{r^2} + A^2 \left(-R^4 r^2 + \frac{2R^2}{3} r^4 - \frac{1}{6} r^6 \right) + \\ & + B^2 \left(-\frac{1}{12} R^2 r^6 + \frac{3}{10} R^4 r^8 - \frac{13}{30} R^4 r^{10} + \frac{2}{7} R^2 r^{12} - \frac{1}{14} r^{14} \right) + \\ & + B^2 n^2 \left(\frac{7}{192} R^2 r^8 - \frac{9}{80} R^2 r^8 + \frac{11}{80} R^4 r^{10} - \frac{13}{168} R^2 r^{12} + \frac{15}{896} r^{14} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{1(n)}}{Eh} = & a_n \frac{2-n}{4} r^n + b_n \frac{2+n}{2} r^{-n} - c_n r^{n-2} - d_n r^{-n-2} + \\ & + AB \left[\frac{16(6-n^2)(4+n^2)}{(16-n^2)(36-n^2)} R^0 r^4 - \frac{64(8-n^2)(6+n^2)}{(36-n^2)(64-n^2)} R^4 r^8 + \right. \\ & \left. + \frac{80(10-n^2)(8+n^2)}{(64-n^2)(100-n^2)} R^2 r^8 - \frac{32(12-n^2)(10+n^2)}{(100-n^2)(144-n^2)} r^{10} \right] \end{aligned}$$



О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Пересчет, выполненный с учетом указанного обстоятельства, не меняет ни метода решения задачи, ни качественных результатов, заменяя лишь величину критического давления и величину относительного прогиба, при котором происходит потеря устойчивости. Устойчивость попрежнему теряется с числом складок, равным восьми, и кривые $n = 5, 6, 7, 8, 9$, приведенные на фиг. 9, лишь несколько смещаются кверху; для критического давления получается значение $p_0 \approx 880$ вместо 660 и для относительного прогиба $w_0/h \approx 9.6$ вместо 8.7.

Авторы выражают благодарность Л. И. Балабуху, обратившему внимание на указанную ошибку.

Поступило в редакцию
4 X 1948

Д. Ю. Панов, В. И. Феодосьев

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ



1958-1961 Морозов Н.Ф. – доказательство существования несимметричных форм равновесия

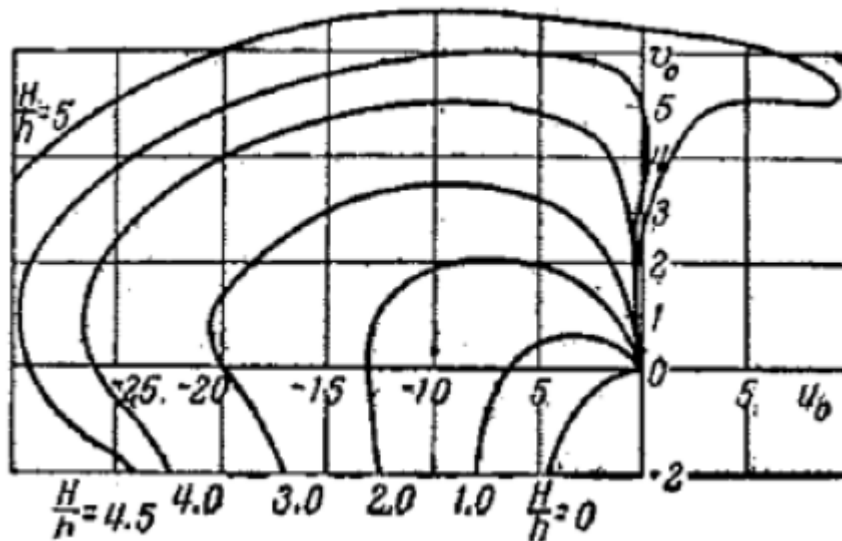
Н. Ф. Морозов, Единственность симметричного решения задачи о больших прогибах симметрично нагруженной круглой пластины, Докл. АН СССР, 1958, том 123, номер 3, 417–419

Н. Ф. Морозов, К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, нагруженной симметричной нагрузкой, Изв. вузов. Матем., 1961, номер 2, 126–129

Н. Ф. Морозов, Качественное исследование круглой симметрично сжимаемой пластинки при большой краевой нагрузке (доказательство появления гофра), Докл. АН СССР, 1962, том 147, номер 6, 1318–1319

1963 - Феодосьев Д.И – Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем. ПММ

Феодосьев Д.И. «Обнаруживается, что при больших прогибах форма упругой поверхности оболочки подвержена глубоким изменениям, которые при решении задачи вариационным методами не могут быть учтены одним или двумя параметрами.» (1963)



О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ



- **1969** **Piechocki W. – доказательство единственности устойчивого несимметричного решения**
- **1973** **Cheo L.S., Reiss E.L. – численное решение**

QUARTERLY OF APPLIED MATHEMATICS

APRIL, 1973

UNSYMMETRIC WRINKLING OF CIRCULAR PLATES*

BY

L. S. CHEO (*The William Paterson College of New Jersey*)

AND

EDWARD L. REISS (*Courant Institute of Mathematical Sciences*)

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ



1973 Cheo L.S., Reiss E.L. – численное решение

The pure bending problem was studied previously by Panov and Feodosiev [10] by a Galerkin procedure. Approximations were obtained in the form

$$W = (1 - z^2)^2(A + Bx^4 \cos n\theta) \quad (5.2)$$

for any integer $n \geq 2$. We denote the Panov and Feodosiev wrinkling loads and critical wrinkling load by $P_3^*(n)$ and P_2^* . Their results are summarized in Table III (cf. Table I). Since $P_2^* = P_3^*(2) = 0$, Panov and Feodosiev found that in addition to the axisymmetric state there is an unsymmetric state which branches from $P = 0$. However, this unsymmetric state is spurious because of Piechocki's [11] uniqueness theorem. This theorem states that there is a unique solution of Problem B with $\lambda = 0$ for all sufficiently small P . Since we can establish the existence of a solution of Problem S with $\lambda = 0$ for all sufficiently small P using, for example, the analysis in [7], we conclude that an unsymmetric solution cannot branch from $P = 0$. Furthermore, we observe by comparing Tables I and III that Panov and Feodosiev's wrinkling loads and corresponding wave numbers differ substantially from the present results. Thus, (5.2) may be too inaccurate to adequately describe the wrinkling of the plate.

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ



1973 Cheo L.S., Reiss E.L. – численное решение

Сравнение

<i>Однородная пластина</i>	Cheo et al. (1973)	Panov et al. (1948)
Критическая нагрузка	62600	25415
Форма потери устойчивости	14	8

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

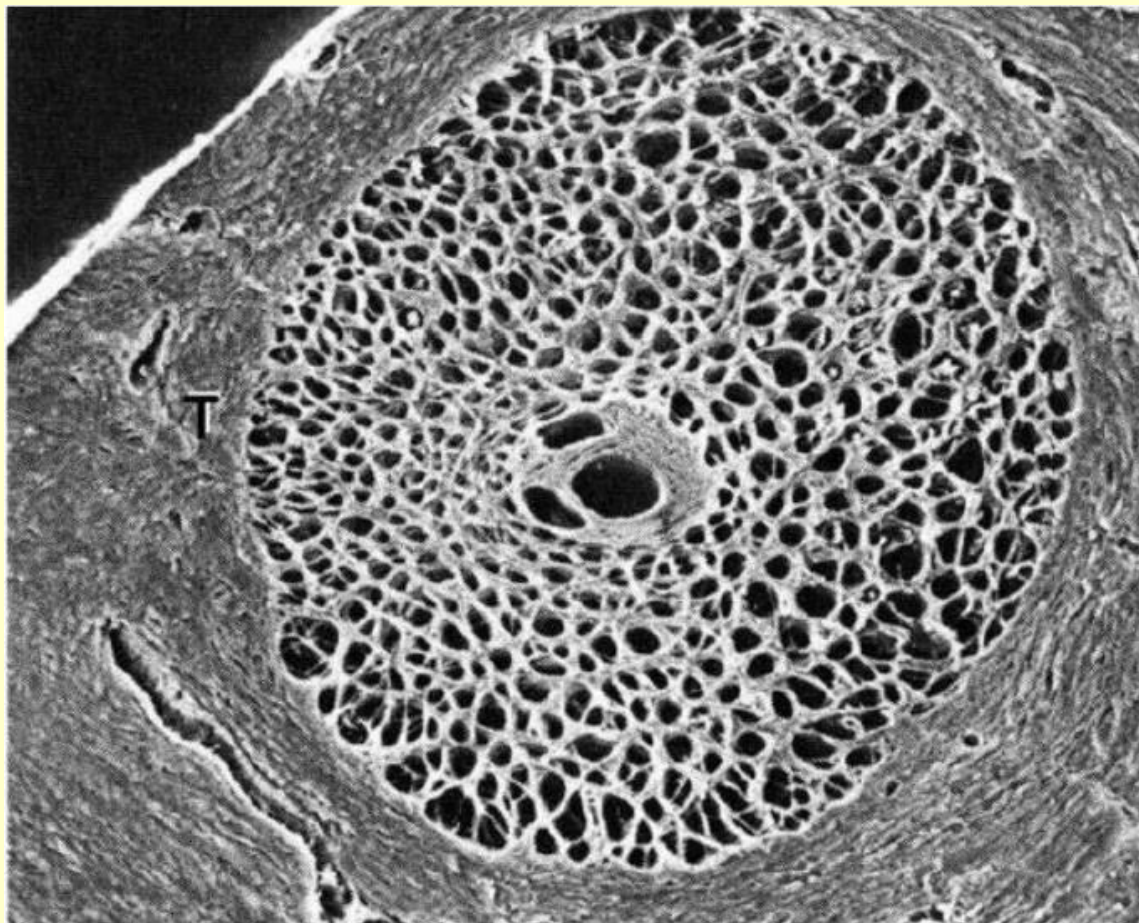


Professor Gerard D. Galletly (1928 – 2013)



The experiments were conducted by Professor Gerry Galletly at the University of Liverpool during the late 1970s and early 1980s.

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ



Уравнение равновесия неоднородных пластин

$$D\Delta\Delta w + D'L_1^+(w) + D''L_2^+(w) = p + L(w, F),$$

$$\Delta\Delta F/E + (1/E)'L_1^-(F) + (1/E)''L_2^-(F) = -hL(w, w)/2,$$

$$D(r) = E(r)h^3/12(1-\nu^2),$$

$$L_1^\pm(y) = 2y''' + \frac{2+\nu}{r}y'' + \frac{2}{r^2}(\ddot{y})' - \frac{y'}{r^2} - 3\frac{\ddot{y}}{r^3}, \quad L_2^\pm(y) = y'' \pm \nu\left(\frac{y'}{r} + \frac{\ddot{y}}{r^2}\right),$$

$$L(y, z) = y''\left(\frac{z'}{r} + \frac{\ddot{z}}{r^2}\right) + z''\left(\frac{y'}{r} + \frac{\ddot{y}}{r^2}\right) - 2\left(\frac{\dot{y}'}{r} - \frac{\dot{y}}{r^2}\right)\left(\frac{\dot{z}'}{r} - \frac{\dot{z}}{r^2}\right).$$

Граничные условия

$$w = w' = \frac{F'}{r} + \frac{\ddot{F}}{r^2} = -\left(\frac{\dot{F}}{r}\right)' = 0.$$

Уравнение равновесия неоднородных пластин

Среднее значение модуля упругости

$$E_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R E(r) r dr d\theta, \quad E(r) = E_0 f(r),$$

Безразмерные переменные

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad w^* = \beta \frac{w}{h}, \quad p^* = \beta^3 \frac{pR^4}{E_{av}h^4}, \quad F^* = \beta^2 \frac{F}{E_{av}h^3}, \quad \beta^2 = 12(1 - \nu^2)$$

$$g_1(r) \Delta \Delta w + g_1'(r) L_1^+(w) + g_1''(r) L_2^+(w) = p + L(w, F),$$

$$g_2(r) \Delta \Delta F + g_1'(r) L_1^-(w) + g_1''(r) L_2^-(w) = -L(w, w)/2,$$

$$g_1(r) = E_0 f(r) / E_{av}, \quad g_2(r) = 1 / g_1(r).$$

Решение

$$w(r, \theta) = w_s(r) + w_n(r) \cos n\theta, \quad F(r, \theta) = F_s(r) + F_n(r) \cos n\theta,$$

Симметричные составляющие

$$g_1 \left(\omega_0'' + \frac{\omega_0'}{r} - \frac{\omega_0}{r^2} \right) + g_1' \left(\omega_0' + \frac{\nu}{r} \omega_0 \right) = \frac{pr}{2} + \frac{\omega_0 \phi}{r},$$

$$g_2 \left(\phi_0'' + \frac{\phi_0'}{r} - \frac{\phi_0}{r^2} \right) + g_2' \left(\phi_0' + \frac{\nu}{r} \phi_0 \right) = -\frac{\omega_0^2}{2r},$$

Введены обозначения

$$\omega_0 = w_s' \quad \phi_0 = F_s'$$

Граничные условия

$$\omega_0(1) = \phi_0(1) = 0$$

Решение

$$w(r, \theta) = w_s(r) + w_n(r) \cos n\theta, \quad F(r, \theta) = F_s(r) + F_n(r) \cos n\theta,$$

Для несимметричных составляющих $w_n(r), F_n(r)$

$$g_1 \Delta_n \Delta_n w_n + g_1' L_{1n}^+(w_n) + g_1'' L_{2n}^+(w_n) = \omega_0' \left(\frac{F_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} F_n \right) + \phi_0' \left(\frac{w_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) + \frac{w_n''}{r} \phi_0 + \frac{F_n''}{r} \omega_0,$$

$$g_2 \Delta_n \Delta_n F_n + g_2' L_{1n}^-(F_n) + g_2'' L_{2n}^-(F_n) = -\omega_0' \left(\frac{w_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) - \frac{w_n''}{r} \omega_0,$$

$$\Delta_n y = y'' + \frac{y'}{r} - \frac{n^2}{r^2} y,$$

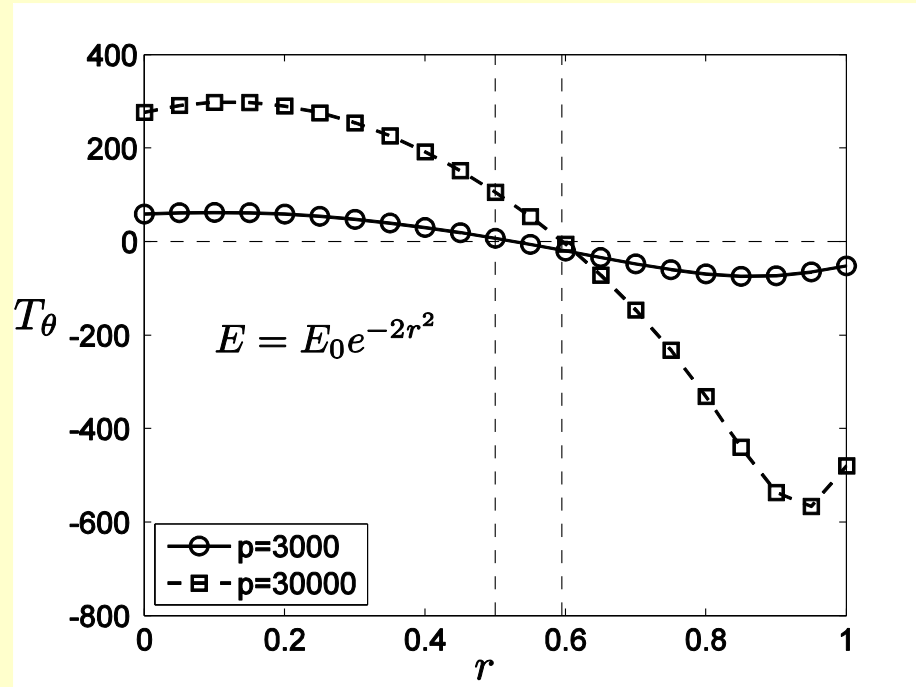
$$L_{1n}^{\pm}(y) = 2y''' + \frac{2 \pm \nu}{r} y'' - \frac{2n^2 + 1}{r^2} y' + \frac{3n^2}{r^3} y, \quad L_{2n}^{\pm}(y) = y'' \pm \nu \left(\frac{y'}{r} - \frac{n^2}{r^2} y \right),$$

$$w_n(1) = w_n'(1) = F_n(1) = F_n'(1) = 0.$$

Решение

$$E = E_0^{(1)} e^{-q_1 r}$$

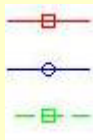
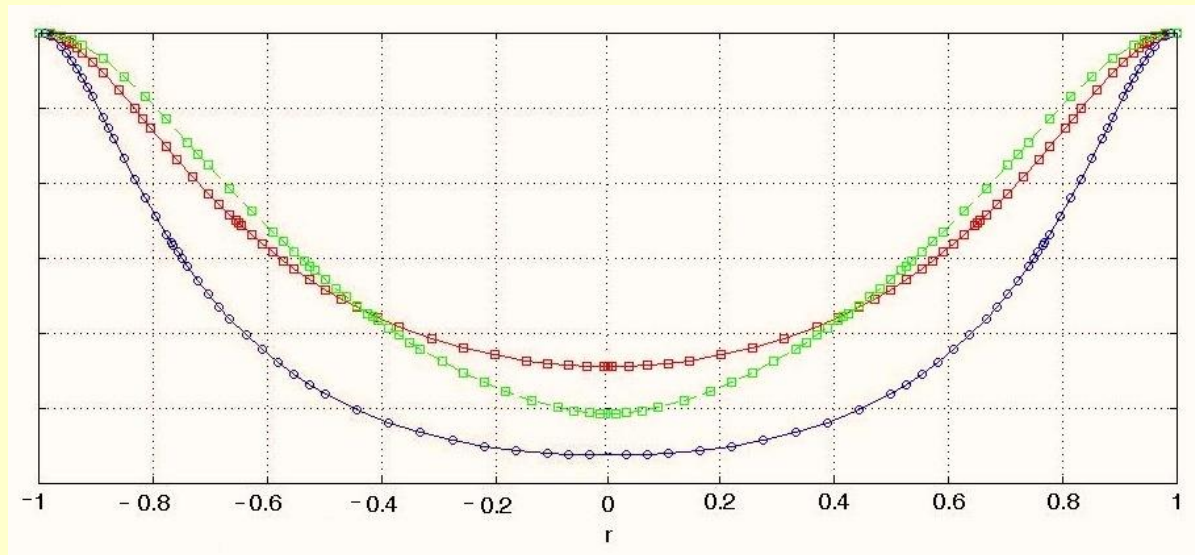
$$E = E_0^{(2)} e^{-q_2 r^2}$$



Безразмерное окружное усилие для различных значений нагрузки

Осесимметричное напряженно-деформированное состояние

Безразмерный прогиб однородной и неоднородной пластин

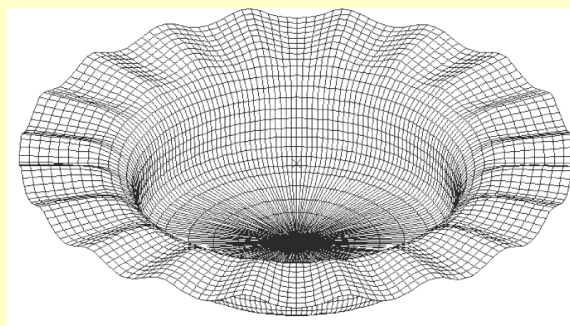
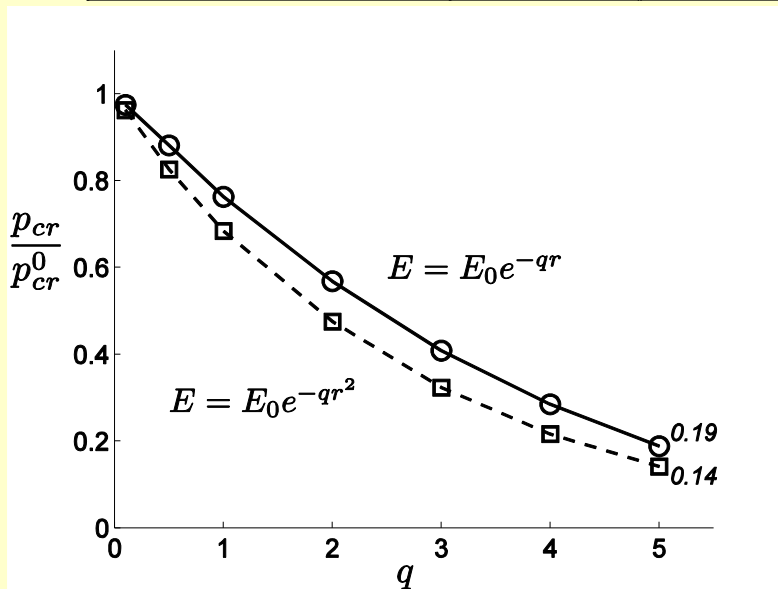


однородная пластина
неоднородная пластина (e^{-3r})
неоднородная пластина (e^{3r})

Результаты

Критическая нагрузка для неоднородных пластин

		q=0	q=0.5	q=1	q=3	q=5
$E = E_0^{(2)} e^{-q_2 r^2}$	p_{cr}	64522	56841	49207	26324	12123
	n	14	14	14	15	17
$E = E_0^{(1)} e^{-q_1 r}$	p_{cr}	64522	53287	44137	20843	9103
	n	14	14	14	16	20



Изменение критической нагрузки при изменении степени неоднородности пластины



Сравнение

<i>Однородная пластина</i>		Cheo et al. (1973)	Panov et al. (1948)
Критическая нагрузка	62832	62600	25415
Форма потери устойчивости	14	14	8

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Ciprian D Coman
West Molesey, Surrey, UK

2010-2019

Asymmetric bifurcations in a pressurised circular thin plate under initial tension

Ciprian D. Coman

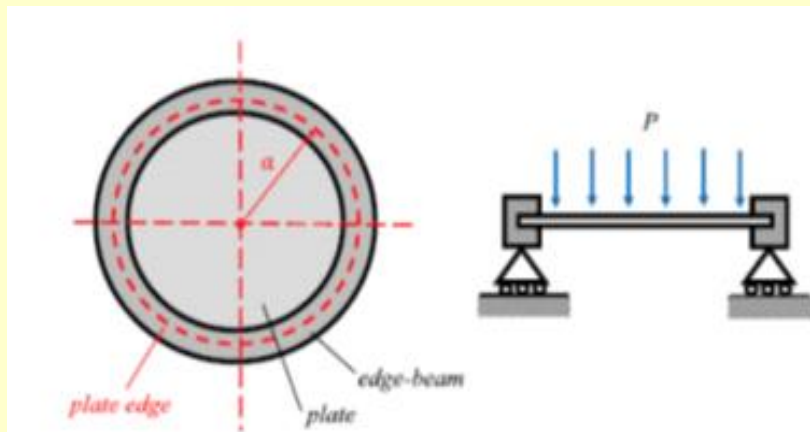
Schlumberger Gould Research Centre, High Cross, Madingley Road, Cambridge CB3 0EL, UK

On the nonlinear membrane approximation and edge-wrinkling

Ciprian D. Coman^{a,b,*}, Andrew P. Bassom^{c,d}

Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap

Ciprian D. Coman^{a,b}, Andrew P. Bassom^{c,d,*}



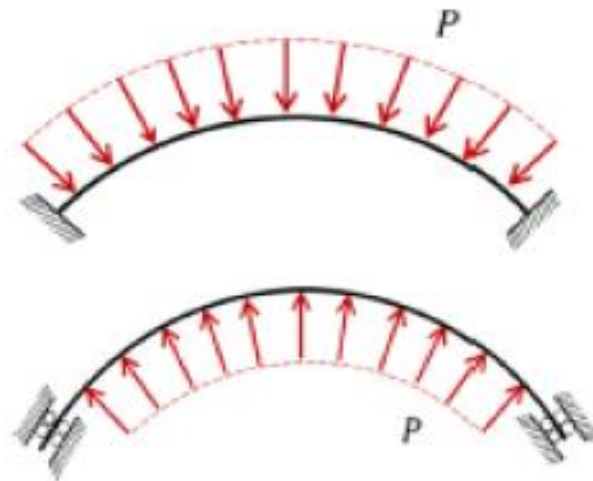
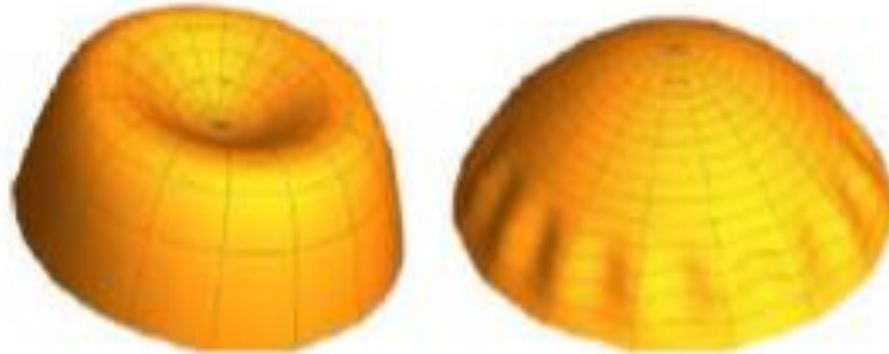
Solid Mechanics and Its Applications

Ciprian D. Coman

**Continuum
Mechanics and
Linear Elasticity**

An Applied Mathematics Introduction

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

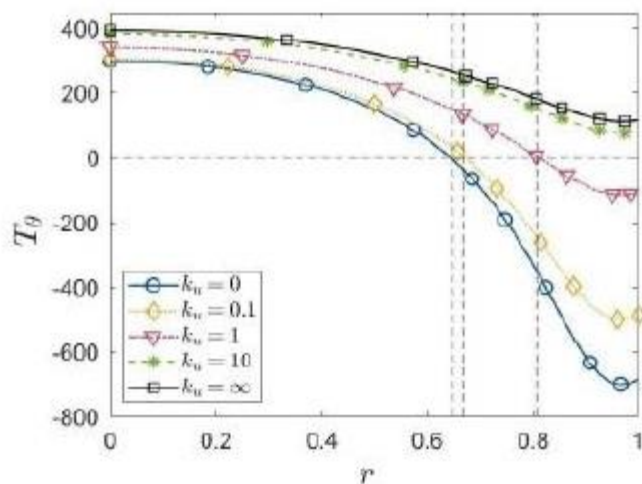


The two configurations for the pressurised spherical cap: the problems $C_{\text{top}}^{(1)}$ (top) and $C_{\text{bot}}^{(1)}$ (bottom). The externally pressurised shell is assumed to be clamped along its outer perimeter, while the other case involves a clamped, but movable edge (further explanation in the text).

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ НА ПОЯВЛЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Предпосылки для перехода симметрично нагруженной пластины в неосесимметричное состояние создают сжимающие напряжения, которые появляются в окрестности края пластины при больших прогибах. На рис. показано, как изменяется интенсивность безразмерных окружных усилий $T_\theta(r)$ при различных значениях коэффициента жесткости пружины k_u . Значение $k_u = 0$ соответствует отсутствию ограничений на перемещение точек края пластины в радиальном направлении, т.е. условию $T_r = 0$. Абсолютно жесткой заделке края с условием $u = 0$ соответствует

кривая, обозначенная $k_u = \infty$.



*Безразмерное окружное усилие $T_\theta(r)$
для различных значений коэффициента
жесткости пружины k_u .
Значение нагрузки принято $p = 30000$.*



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2. 2016



Эффект перехода от осесимметричной к неосесимметричной форме потери устойчивости круглой пластины с ростом действующего на неё равномерно распределенного давления исследован в [8–10]. Для описания этого эффекта в [8] выведена система уравнений равновесия несимметричных пологих оболочек в больших перемещениях. Решение этой системы отыскивалось методом Бубнова–Галёркина при задании формы потери устойчивости пластины радиусом a в полярных координатах в виде

$$w = (\rho^2 - 1)^2 (A + B\rho^4 \cos m\varphi), \quad \rho = r/a, \quad (1)$$

В результате было показано, что при закреплении края пластины, не препятствующего проскальзыванию в окружном и радиальном направлениях, неосесимметричная потеря устойчивости с минимальным значением критической нагрузки происходит по форме, имеющей 8 волн по окружности пластины.

8. Панов Д.Ю., Феодосьев В.И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // ПММ. – 1948. – Т. 12, № 4. – С. 384–406; 1949. – Т. 13, № 1. – С. 116.

9. Cheo L.S., Reiss E.L. Unsymmetric wrinkling of circular plates // Quart. Appl. Math. – 1973. – Vol. 31. – No. 1. – P. 75–91.

10. Бауэр С.М., Воронкова Е.Б., Романова А.А. О потере устойчивости осесимметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2012. – Вып. 1. – С. 80–85.

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Методом конечных элементов в пакетах NASTRAN и ANSYS определены критические точки в задачах устойчивости круглых пластин под действием равномерной и сосредоточенной нагрузок Мануйловым Г. А., Косицыным С. Б., Бегичевым М. М. При этом рассматривались на границе условия скользящей жёсткой заделки и шарнирного опирания.

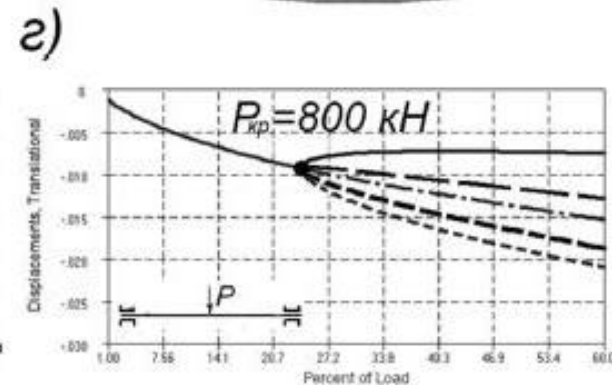
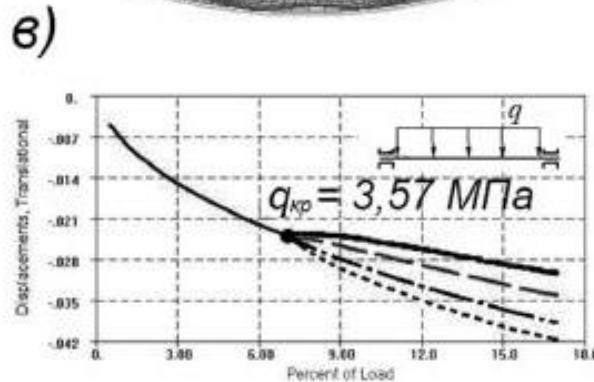
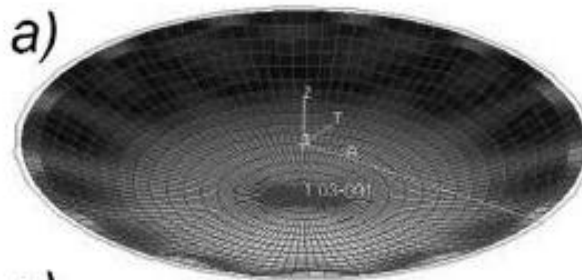
УСТОЙЧИВОСТЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РАВНОВЕСИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын, М.М. Бегичев

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), г. Москва, РОССИЯ.

АННОТАЦИЯ: Рассматривается устойчивость равновесия круглой пластины при больших прогибах. Исследовано влияние конечноэлементной дискретизации на величину критической нагрузки.

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ



Потеря устойчивости «в малом» пластины с закреплением скользящая заделка:

а) форма пластины, потерявшей устойчивость, под действием распределенной нагрузки;

б) форма пластины, потерявшей устойчивость, при нагружении сосредоточенной силой в центре;

в) график развития вертикальных перемещений точек пластины, нагруженной распределенной нагрузкой, расположенных вдоль параллели с радиусом $0,85R$;

г) график развития вертикальных перемещений точек пластины под действием сосредоточенной силы в центре, расположенных вдоль параллели с радиусом $0,85R$.

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ



Ранее аналогичная задача при действии распределенной нагрузки и закреплении на контуре в виде скользящей заделки была решена методом Бубнова-Галеркина в первом приближении Д.Ю. Пановым и В.И. Феодосьевым [1]. Согласно их результатам бифуркационная потеря устойчивости осесимметричного равновесия пластины была мягкой, а минимальной критической нагрузке соответствовало образование восьми окружных волн. Однако принятая ими форма поверхности прогибов, соответствующая прогибам защемленной пластины, весьма сильно отличается от действительной предкритической «тазообразной» формы

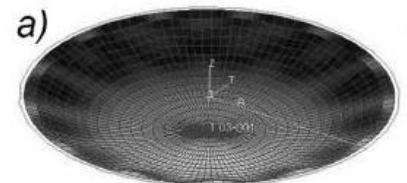
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Панов Д.Ю., Феодосьев В.И.** О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах. // ПММ 1948, т.12, в.4, с.398-406.
2. **Морозов Н.Ф.** Избранные двумерные задачи теории упругости – Изд-во Лен. университета, 1978, 182 с.
3. **Морозов Н.Ф.** К вопросу о существовании несимметричных решений в задачах о больших прогибах круглой пластины, нагруженной симметричной нагрузкой. Изв. высш. учебн. заведений СССР. Сер. мат. 1961, 21, №2. С. 126-129.

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ



В случае закрепления края пластины по типу скользящей заделки, под действием как распределенной нагрузки (рис. *а*), так и сосредоточенной силы (рис. *б*), наблюдалась мягкая потеря устойчивости («в малом»). На модели из 1784 КЭ типа plate при действии распределенной нагрузки бифуркация осесимметричного равновесия ($q_{кр}=3,57$ МПа, прогиб в центре $\Delta=6,9\text{ см} =13,8\delta$) переводит пластину в циклически симметричное равновесие с образованием 13 полуволн по окружности (рис. *а*). График развития вертикальных перемещений точек пластины, расположенных вдоль параллели с радиусом $0,85R$ показан на рис. *в*.

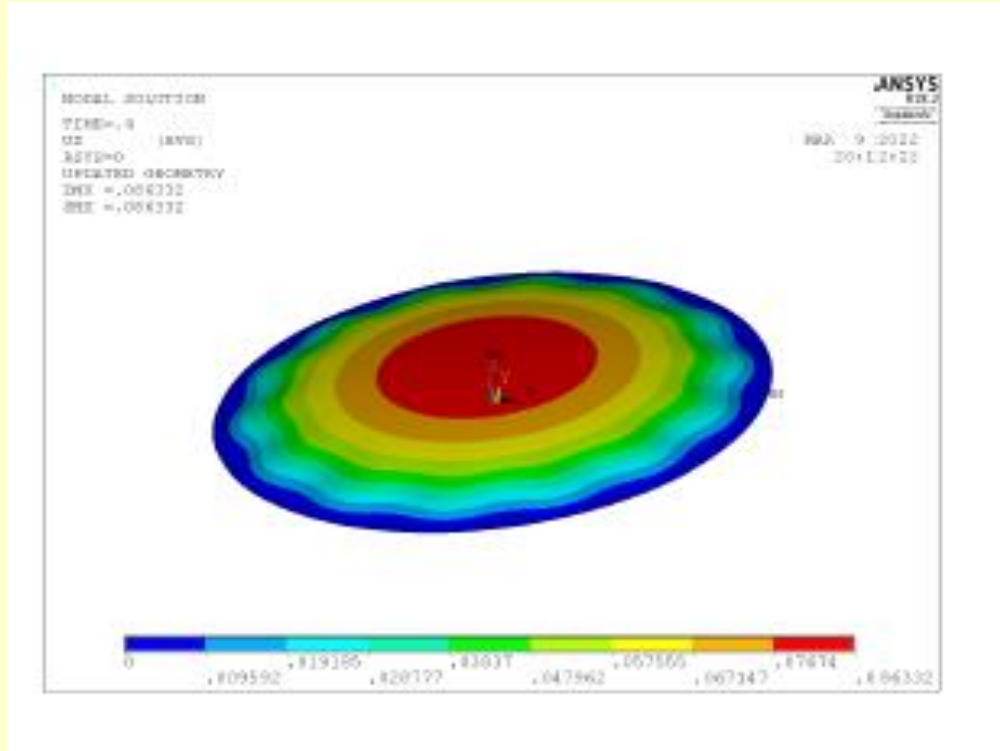




ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕЙ ЗАДЕЛКЕ

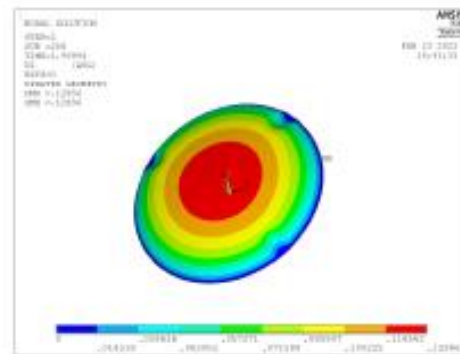
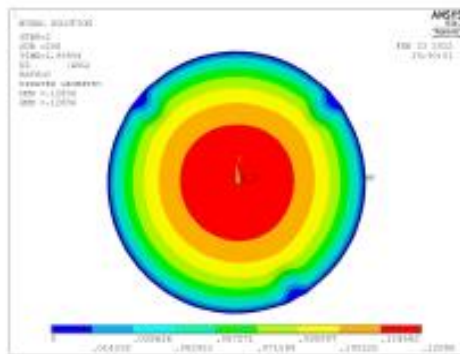
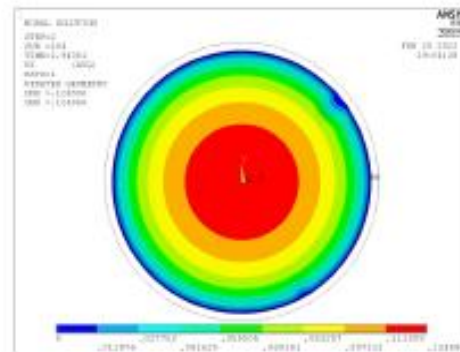
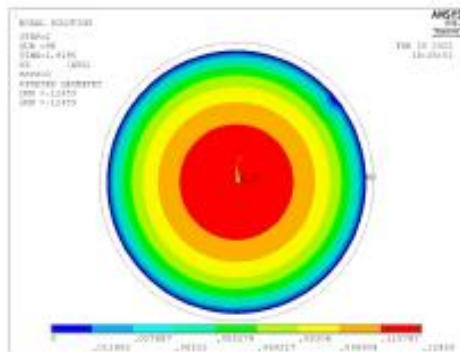
N	P
13	63200
14	62832
15	64300

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ



Потеря осесимметричной формы равновесия круглой пластины со скользящей заделкой ($n = 14$)

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ



Появление первой волны при нагрузке $\bar{p} = 16115750$ Па (первый ряд, слева); второй волны при нагрузке $\bar{p} = 16142060$ Па (первый ряд, справа); появление третьей волны при $\bar{p} = 16195160$ (второй ряд)

Asymmetric Buckling of Orthotropic Plates Under Normal Pressure

Svetlana M. Bauer, Dmitry A. Indeitsev, Boris N. Semenov, and Eva B. Voronkova

$$D_r L_w(w) = P + L(w, F),$$

$$L_F(F)/(hE_\theta) = -L(w, w)/2,$$

where $w(r, \theta)$ is the displacement in the z direction, $F(r, \theta)$ is the Airy stress function, $D_r = E_r h^3 / 12(1 - \nu_r \nu_\theta)$ is the bending stiffness. The Laplacian and differential operators L_w, L_F, L are defined as

$$\Delta = (\)'' + \frac{1}{r} (\)' + \frac{1}{r^2} (\),$$

$$L_w(y) = y'''' + 2\frac{y'''}{r} + 2\frac{\lambda_{r\theta}}{r^2} \left(\ddot{y}'' - \frac{\ddot{y}'}{r} + \frac{\ddot{y}}{r^2} \right) - \frac{\lambda}{r^2} \left[y'' - \frac{y'}{r} - \left(2\frac{y}{r^2} + \frac{\ddot{y}}{r^2} \right) \right],$$

$$L_F(y) = y'''' + 2\frac{y'''}{r} + \frac{\kappa}{r^2} \left(\ddot{y}'' - \frac{\ddot{y}'}{r} + \frac{\ddot{y}}{r^2} \right) - \frac{\lambda}{r^2} \left[y'' - \frac{y'}{r} - \left(2\frac{y}{r^2} + \frac{\ddot{y}}{r^2} \right) \right],$$

$$L(x, y) = x'' \left(\frac{y'}{r} + \frac{\ddot{y}}{r^2} \right) + y'' \left(\frac{x'}{r} + \frac{\ddot{x}}{r^2} \right) - 2 \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)' \left(\frac{\dot{y}}{r} \right)',$$

$$\lambda = \frac{D_\theta}{D_r} = \frac{E_\theta}{E_r}, \quad \lambda_{r\theta} = \frac{D_{r\theta}}{D_r}, \quad \kappa = \frac{E_\theta}{G_{r\theta}} - 2\nu_\theta = 2 \frac{\lambda - \lambda_{r\theta} \nu_\theta}{\lambda_{r\theta} - \nu_\theta},$$

$$D_i = \frac{h^3 E_i}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)}, \quad (i = r, \theta), \quad D_k = \frac{h^3}{12} G_{r\theta}, \quad D_{r\theta} = D_r \nu_\theta + 2D_k.$$



Asymmetric Buckling of Orthotropic Plates Under Normal Pressure

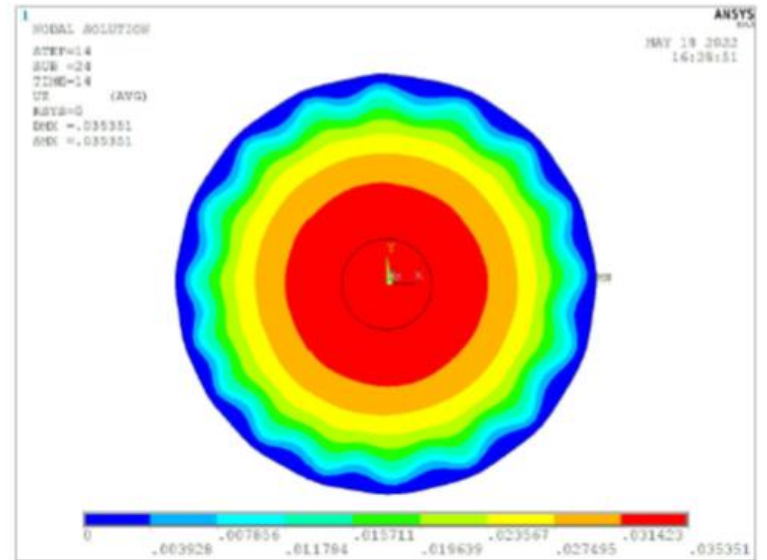
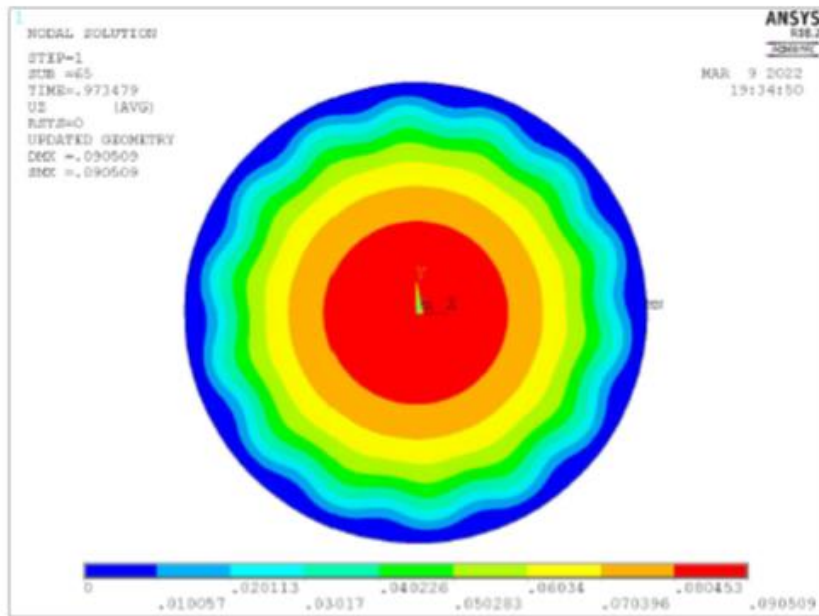


Fig. 2.3 Wrinking of an isotropic plate with 14 waves (top) and orthotropic plate (bottom) obtained by during finite element simulations



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!